第10章 无穷级数

- 常数项级数的概念和性质
- 常数项级数的审敛法
- 幂级数
- 将函数展开成幂级数
- 傅里叶级数
- 一般周期函数的傅里叶级数

10.1 常数项级数的概念和性质

10.1.1 常数项级数的概念

10.1.2 收敛级数的基本性质

1. $\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{100}+\dfrac{3}{1000}+\cdots+\dfrac{3}{10^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{10^n}=\dfrac{1}{3}$

2. $1+2+3+\cdots+n+\cdots=?$

10.1.1 常数项级数的概念

1. 定义

给定一个数列 u_1， u_2， u_3， …， u_n， …，

则由这数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (1)$$

叫做常数项级数，简称级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中u_n叫做级数的一般项。

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

2. 级数前n项的部分和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \qquad (2)$

称为级数（1）的部分和, 并得到一个新的数列: $\{s_n\}$.

无穷数列与无穷级数之关系:

由数列$\{u_n\}$→无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ （构造、产生、对应）

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \nearrow \{u_n\}: \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n, \; \ldots \\ \qquad\quad \updownarrow \\ \searrow \{s_n\}: \; s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_n, \; \ldots \end{cases}$$

$$u_1 = s_1, \; u_2 = s_2 - s_1, \; \ldots, u_n = s_n - s_{n-1}, \ldots$$

3. 级数收敛的定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$有极限s(常数),

即$\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，极限值s叫做这级数的和，记作

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

如果$\{s_n\}$没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

如： 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$发散,

$$\because \lim_{n\to\infty} s_{2n} \neq \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{s_n\}$极限存在： $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

当级数收敛时，其和s与部分和s_n之差

$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$(3)　叫做级数的余项。

若级数收敛:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = 0$$

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 如果$q \neq 1$时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q| < 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q| > 1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

若$|q| = 1$，当$q = 1$时，$s_n = na \to \infty$ 发散

当$q = -1$时， 级数变为$a - a + a - a + \cdots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在 发散

综上 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q| < 1时,收敛 \\ 当|q| \geq 1时,发散 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

例 2 判别无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$的收敛性.

解 $\because \quad u_n = 2^{2n} 3^{1-n} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1},$

所以，级数为等比级数，

公比$q = \frac{4}{3},$

$\because |q| \geq 1,$

$\therefore$ 原级数发散.

10.1.2　收敛级数的基本性质

性质10.1.1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$亦收敛.

证: 设$\sum_{i=1}^{n} u_i = s_n$, 则$\sum_{i=1}^{n} ku_i = ks_n \to ks(n \to \infty)$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} ku_i = ks = k\sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

结论: 若$k \neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ku_n$收敛

$$\Leftarrow: \quad \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot ku_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

性质10.1.2 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, 则

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛, 其和为$s\pm\sigma$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}ku_i = k\sum_{i=1}^{\infty}u_i \qquad (k\neq 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k\,u_n \pm l\,v_n)=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm l\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

$$(k,\ l\neq 0)$$

注意:

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$一个收敛, 一个发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$发散.

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$可能收敛，也可能发散。

例4 (1)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$均发散，

但$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \sum_{n=1}^{\infty}0 = 0$收敛。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(n + \frac{1}{2})$也发散

性质10.1.3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不改变级数的敛散性。

证明 仅证：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$也收敛$(k \geq 1)$.

$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$的前$n$项和

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = s_{n+k} - s_k,$$

所以$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_{n+k} - s_k)$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{n+k} - s_k = s - s_k .$$

类似地可以证明：在级数前面加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

$$1=0\ ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+\ldots$$

$$\neq(1-1)+(1-1)+\ldots$$

$$=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+1+\ldots$$

$$\neq 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$$

$$=1$$

发散的无穷级数不可求和，加括弧后可能可以求和，但用不同方式加括弧所求的和可能不同

性质10.1.4 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明：仅证一个具体情形，思想方法可推广到一般情形。 $(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$

$$\sigma_1 = s_2,\ \sigma_2 = s_5, \sigma_3 = s_9,\ \cdots, \sigma_m = s_n,\ \ \cdots$$

$\therefore$ 数列$\{\sigma_m\}$为$\{s_n\}$的子列，则 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s.$

注意 (1) 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

(2) 如果加括号后所成的级数发散，则原来的级数也发散.

性质10.1.5 (级数收敛的必要条件)

当n无限增大时, 它的一般项 u_n趋于零, 即

级数收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

证明 $\because \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 则 $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

注意 (1) 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散

例如 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots$ 发散

(2) 必要条件不充分.

如: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

例5 证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散.

证明: 假设调和级数收敛，其和为s.

则$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=s-s=0.$

但 $s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$

由收敛数列的保序性：$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)\geq\frac{1}{2}.$ 矛盾。

当n越来越大时，调和级数的项变得越来越小，然而，慢慢地——非常慢慢地——它的前n项和将增大并超过任何一个有限值 $s_n>10$ 当$n=12367$

对级数按如下的方法加括号　Oresme在1360年证明

2项　　2项　　4项　　8项

$$(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})$$

$$+\cdots+(\underline{\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}})+\cdots$$

2^m项

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\times 2^m+\cdots$$

即加括号后的部分和$\sigma_m>\frac{1}{2}m\to\infty.$

$\therefore$ 级数发散．　　由性质10. 1. 4, 调和级数发散.